Im Geltungsbereich der Gl. (19) hängt die Wärmeleitfähigkeit in dreifacher Weise von der Temperatur ab. Wäre $C=0$ und $c_v=\text{const.}$, so wäre k gemäß (20) proportional $\sqrt{T}$. Da aber c_v wegen der mit wachsender Temperatur erfolgenden Anregung der Schwingungsfreiheitsgrade mit der Temperatur langsam zunimmt und der Ausdruck $(1+C/T)^{-1}$ für $C \geqq 0$ ebenfalls steigt, wächst k etwas stärker als mit $\sqrt{T}$. Eine Abhängigkeit von der Dichte ist, wie Gl. (19) zeigt, nicht vorhanden.

Der bei etwa 1800 °K einsetzende sehr viel stärkere Anstieg der Wärmeleitfähigkeit ist auf die Dissoziation des Sauerstoffs zurückzuführen. Gl. (19) ist hier nicht mehr anwendbar, weil nun ein zusätzlicher Beitrag zur Wärmeleitfähigkeit dadurch entsteht, daß die Sauerstoffatome, ihrem Konzentrationsgefälle folgend, in kältere Gebiete diffundieren und dort wieder rekombinieren. Immerhin läßt Gl. (19) noch erkennen, daß die Wärmeleitfähigkeit nun stark ansteigen und zudem dichteabhängig werden muß, denn diese beiden Eigenschaften bringt die spezifische Wärme c_v mit.

Bei etwa 4000 °K ist der Sauerstoff schon größtenteils dissoziiert, und der Beitrag infolge Dissoziation zur Wärmeleitfähigkeit schwächt sich ab. Erst mit einsetzender Dissoziation des Stickstoffs (ca. 4700 °K) steigt die Wärmeleitfähigkeit erneut stark an.

In Abb. 7 wird der experimentell gefundene Verlauf von k drei theoretisch berechneten Wärmeleitfähigkeitsverläufen bei Atmosphärendruck von HANSEN, THOMAS und STUPOCHENKO gegenübergestellt. Die theoretischen Verläufe sind dem Manuskript eines Tagungsvortrags von FAY entnommen [5]. Die experimentelle Kurve befindet sich in befriedigender Übereinstimmung mit den Kurven von THOMAS und HANSEN.

[5] J. A. FAY, Hypersonic Heat Transfer in the Air Laminar Boundary Layer, AGARD Hypersonic Specialists' Conference, Brüssel, April 1962.

Lichtmischung in endlichen Plasmavolumen

A. SALAT

Institut für Plasmaphysik GmbH, Garching bei München

(Z. Naturforschg. **20 a**, 689—695 [1965]; eingegangen am 9. Februar 1965)

A third order scattering process of laser light in a fully ionized plasma is considered, extending previous work by KROLL, RON, and ROSTOKER [1]. Two laser beams may cause the plasma to oscillate with relatively high amplitude if the difference of their frequencies approaches the electron plasma frequency. The light of either one of the beams or of a third beam may be scattered by the induced fluctuations. The plasma is described macroscopically by a cold electron fluid. Special emphasis is given to the finite dimensions of the scattering volume. The results give detailed information about the angular width and intensity of the scattered light. Marked differences in the use of a two and a three laser system are pointed out, the former giving less intensity, the later being more difficult to realize experimentally.

Über die „Mischung" von Laserlicht in vollionisierten Plasmen sind bisher mehrere Arbeiten erschienen [1–8]. Von ihnen verdient eine [1] unter experimentellen Gesichtspunkten besonders Interesse, da hohe Intensitäten des nichtlinearen Streulichtes vorhergesagt werden.

Es ist bekannt, daß durch die gleichzeitige Verwendung von zwei Laserstrahlen nichtlineare kohärente Dichteschwankungen im Plasma erzwungen werden [1, 7]. Wenn die Differenz der beiden eingestrahlten Frequenzen der Plasmafrequenz nahekommt, wächst die Amplitude der Fluktuationen

[1] N. KROLL, A. RON u. N. ROSTOKER, Phys. Rev. Letters **13**, 83 [1964].
[2] H. BERK, Phys. Fluids **7**, 917 [1964].
[3] D. DU BOIS u. V. GILINKSY, Phys. Rev. **135**, A 995 [1964].
[4] W. H. KEGEL, Proc. VI-th Intern. Conf. Ionization Phenomena in Gases, Paris 1963, Vol. III, p. 189.
[5] P. PLATZMAN, S. BUCHSBAUM u. N. TZOAR, Phys. Rev. Letters **12**, 573 [1964].
[6] A. SALAT u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. **20 a**, 458 [1965].
[7] F. SLUITER, Phys. Letters **7**, 325 [1963].
[8] VACHASPATI, Phys. Rev. **128**, 664 [1962].

durch Resonanzanregung von elektrostatischen Plasmaschwingungen stark an. Streut man Licht an diesen Fluktuationen, wird man ein Streulichtsignal relativ hoher Intensität erwarten. Als Lichtquelle dazu können beide Laserstrahlen oder ein zusätzlicher dritter Strahl dienen.

Das Spektrum dieses Streulichtes zeigt je nach der Emissionsrichtung eine Linie, die um die Plasmafrequenz nach oben oder unten gegen die Frequenz des zur Streuung verwendeten Lichtes verschoben ist. Aus der Frequenzverschiebung kann daher die Elektronendichte im Plasma bestimmt werden. Eine experimentelle Anwendung wäre in der Weise denkbar, daß die Frequenz eines Lasers kontinuierlich so weit variiert wird, daß die Differenz zu der eines zweiten Lasers den Bereich der vermuteten Plasmafrequenz überstreicht, und dabei Resonanz erzwingt.

Vorliegende Arbeit unterscheidet sich von [1] im wesentlichen insofern, als eine Darstellung verwendet wird, welche a priori die endliche Ausdehnung des Streuvolumens berücksichtigt. Das hat zur Folge, daß sich auf natürliche Weise zusätzliche Aussagen über Winkelverteilung, -Breite und -Intensität des Streulichtes als Funktion von Plasmadimension und geometrischer Anordnung ergeben.

In Abschnitt I wird das Gleichungssystem zur Beschreibung der Dichteschwankungen und des Streuvorgangs formuliert, in Abschnitt II die Lösung für das Streulicht gewonnen, und seine Intensität an numerischen Beispielen für den Fall diskutiert, daß nur zwei Laser verwendet werden. Abschnitt III bringt die Unterschiede, welche die zusätzliche Verwendung eines dritten Lasers zur Folge hat. Eine kurze zusammenfassende Diskussion schließt sich in Abschnitt IV an.

I. Plasmagleichungen

Das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ des Streulichtes ist nach den MAXWELLschen Gleichungen gemäß

$$\left(c^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathfrak{E}(\mathfrak{r}, t) = -4\pi \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{j}(\mathfrak{r}, t) \qquad (1)$$

durch die zeitliche Änderung der Stromstärke $\mathfrak{j}$ bestimmt, die die streuende Welle im Medium induziert.

Zur Berechnung des Stromes dient im folgenden die makroskopische Gleichung für ein Elektronengas mit verschmiertem Ionenhintergrund. Elektron-Ion-Stöße sind hier nur soweit von Interesse, als sie bei Vorgängen mit Resonanzcharakter für eine endliche Resonanzhöhe sorgen. Der Drucktensor wird gleich Null gesetzt. Das heißt, daß von thermischen Freiheitsgraden und von der DOPPLER-Verbreitung der Streulinien abgesehen wird.

Betrachtet man die Größen, welche linear, quadratisch bzw. kubisch von der Laserfeldstärke abhängen, als jeweils eine Größenordnung schwächer und bezeichnet sie mit den Indizes (1), (2), (3), dann wird mit Hilfe der Bewegungsgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{v}\cdot\nabla\right)\mathfrak{v} = \frac{e}{m}\left(\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{B}\right) \qquad (2)$$

und

$$\mathfrak{j} = e\, n\, \mathfrak{v} \qquad (3)$$

aus (1) in der dritten Ordnung

$$\begin{aligned}\left(c^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{\mathrm{P}}^2\right) \mathfrak{E}^{(3)}(\mathfrak{r}, t) &= -4\pi e\left\{\frac{e\,n}{m\,c}\left[\mathfrak{v}^{(2)} \times \mathfrak{B}^{(1)} + \mathfrak{v}^{(1)} \times \mathfrak{B}^{(2)}\right]\right. \qquad (4)\\ &\left. - n\left[\mathfrak{v}^{(2)}\cdot\nabla\mathfrak{v}^{(1)} + \mathfrak{v}^{(1)}\cdot\nabla\mathfrak{v}^{(2)}\right] + \frac{\partial n^{(2)}}{\partial t}\mathfrak{v}^{(1)} + n^{(2)}\frac{\partial \mathfrak{v}^{(1)}}{\partial t}\right\}\end{aligned}$$

mit

$$\omega_{\mathrm{P}}^2 = 4\pi n\, e^2/m\,. \qquad (5)$$

Dabei ist e, n, m die Ladung, Zahldichte und Masse von Elektronen.

Der letzte Term auf der rechten Seite von (4) beschreibt mit $\partial\mathfrak{v}^{(1)}/\partial t = (e/m)\,\mathfrak{E}^{(1)}$ die von linearen Rechnungen geläufige Streuung an Dichtefluktuationen. Hier sind diese erzwungen und nichtlinear: $n^{(2)}$. Es ist nicht a priori klar, daß alle anderen Terme gegen dieses Glied zu vernachlässigen sind, was häufig getan wird [1, 2, 4].

II. Zwei Laserstrahlen

Zwei Laserstrahlen beliebiger Ausbreitungs- und Polarisationsrichtung

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}^{(1)} &= \mathfrak{E}_1 \sin(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{r} - \omega_1 t + \varphi_1) \qquad (6)\\ &+ \mathfrak{E}_2 \sin(\mathfrak{k}_2 \mathfrak{r} - \omega_2 t + \varphi_2) =: \mathfrak{E}_1 \sin \Phi_1 + \mathfrak{E}_2 \sin \Phi_2\end{aligned}$$

mit der Dispersionsbeziehung

$$\mathfrak{k}_i^2\, c^2 - \omega_i^2 + \omega_{\mathrm{P}}^2 = 0\,, \qquad i = 1, 2\,, \qquad (7)$$

deren Frequenzdifferenz sich nur wenig von ω_{P} unterscheidet:

$$\omega_{12} := \omega_1 - \omega_2 = \omega_{\mathrm{P}} + \Delta\omega\,, \qquad |\Delta\omega| \ll \omega_{\mathrm{P}} \qquad (8)$$

und der Bedingung $\quad \omega_i \gg \omega_{\mathrm{P}}\,, \quad i = 1, 2 \qquad (9)$

erzwingen nach den makroskopischen Plasmagleichungen und elementaren Rechnungen nichtlineare Dichteschwankungen (siehe auch [7] und [1])

$$n^{(2)}(\mathfrak{r},t) = \frac{1}{8\pi m}\frac{\omega_P}{\omega_1\omega_2}\,\mathfrak{E}_1\cdot\mathfrak{E}_2\,\frac{(\mathfrak{k}_1-\mathfrak{k}_2)^2}{4(\Delta\omega)^2+\omega_c^2} \cdot\{2\,\Delta\omega\cos(\Phi_1-\Phi_2)+\omega_c\sin(\Phi_1-\Phi_2)\}. \tag{10}$$

Dabei wurde die rechte Seite der Bewegungsgleichung (2) durch $-\omega_c\,\mathfrak{v}$ ergänzt, mit ω_c als Stoßfrequenz. Sie ist nach [9] von der Frequenz Null bis zur Plasmafrequenz konstant. Nach [10] ist

$$\omega_c = \omega_P\,\frac{1}{n\,\lambda_D^3}\cdot\frac{Z\ln\Lambda}{3\sqrt{3}}; \quad \Lambda = \frac{3}{2\,Z\,e^3}\left(\frac{k^3\,T^3}{\pi\,n}\right)^{1/2}; \quad \lambda_D^2 = \frac{k\,T}{4\,\pi\,n\,e^2}. \tag{11}$$

(10) gilt nur, wenn die Stoßfrequenz wesentlich größer als die LANDAU-Dämpfung ω_L ist:

$$\omega_L = \omega_P\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{1}{(k_{12}\,\lambda_D)^3}\exp\{-\tfrac{1}{2}(k_{12}\,\lambda_D)^{-2}\} \tag{12}$$

mit $$k_{12} = |\,\mathfrak{k}_1-\mathfrak{k}_2\,|. \tag{13}$$

Die dazu nötige Bedingung

$$(k_{12}\,\lambda_D)^2 < 1 \tag{14}$$

läßt sich als Bedingung an den Winkel α_{12} zwischen den Vektoren $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ formulieren. Wegen

$$k_{12}^2 = (k_1-k_2)^2 + 4\,k_1\,k_2\sin^2\frac{\alpha_{12}}{2} \approx \left(\frac{\omega_P}{c}\right)^2 + \left(2\,k_1\sin\frac{\alpha_{12}}{2}\right)^2 \tag{15}$$

wird daraus $$2\sin\frac{\alpha_{12}}{2} < \frac{1}{k_1\,\lambda_D}. \tag{16}$$

Den Dichteschwingungen (10) entsprechen longitudinale Feld- und Geschwindigkeits-Fluktuationen

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}^{(2)}(\mathfrak{r},t) &= \frac{e}{2\,m}\frac{\omega_P}{\omega_1\,\omega_2}\,\mathfrak{E}_1\cdot\mathfrak{E}_2\,\frac{\mathfrak{k}_1-\mathfrak{k}_2}{4(\Delta\omega)^2+\omega_c^2}\{2\,\Delta\omega\sin(\Phi_1-\Phi_2)\;-\omega_c\cos(\Phi_1-\Phi_2)\},\\ \mathfrak{v}^{(2)}(\mathfrak{r},t) &= \frac{1}{8\,\pi\,m\,n}\frac{\omega_P}{\omega_1\,\omega_2}\,\mathfrak{E}_1\cdot\mathfrak{E}_2\,\frac{\mathfrak{k}_1-\mathfrak{k}_2}{4(\Delta\omega)^2+\omega_c^2}(\omega_1-\omega_2)\{2\,\Delta\omega\cos(\Phi_1-\Phi_2)+\omega_c\sin(\Phi_1-\Phi_2)\}.\end{aligned} \tag{17}$$

Einsetzen dieser Größen in Diff.-Gl. (4) liefert

$$\begin{aligned}\left(c^2\,\mathrm{rot\,rot}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_P^2\right)\mathfrak{E}^{(3)} &= -\omega_P\left(\frac{e\,\mathfrak{E}_1}{m\,\omega_1\,c}\cdot\frac{e\,\mathfrak{E}_2}{m\,\omega_2\,c}\right)\frac{1}{4}\,\frac{c^2}{4(\Delta\omega)^2+\omega_c^2}\\ &\cdot\sum_{\substack{\sigma,\tau=1,2\\ \sigma\neq\tau}}\Bigg[\left\{(2\,\mathfrak{k}_\sigma-\mathfrak{k}_\tau)\,\mathfrak{k}_\tau\cdot\mathfrak{E}_\sigma\,\frac{\omega_\tau-\omega_\sigma}{\omega_\sigma}+\mathfrak{E}_\sigma\,\mathfrak{k}_{12}^2\right\}\{2\,\Delta\omega\sin(2\,\Phi_\sigma-\Phi_\tau)+\omega_c\,\mathrm{sign}(\sigma-\tau)\cos(2\,\Phi_\sigma-\Phi_\tau)\}\\ &+\left\{\mathfrak{k}_\tau\,\mathfrak{k}_\tau\cdot\mathfrak{E}_\sigma\,\frac{\omega_\tau-\omega_\sigma}{\omega_\sigma}+\mathfrak{E}_\sigma\,\mathfrak{k}_{12}^2\right\}\{\omega_c\cos\Phi_\tau+2\,\Delta\omega\;\mathrm{sign}\;(\tau-\sigma)\sin\Phi_\tau\}\Bigg].\end{aligned} \tag{18}$$

Das zweite Klammerprodukt in (18) hat dieselbe Phase Φ_τ wie das Feld $\mathfrak{E}^{(1)}$ der Laser und ist Lösung der homogenen Differentialgleichung. In [11] wird gezeigt, wie man in diesem Fall Störungsrechnung durchführt ohne säkulares Verhalten zu bekommen. Das Ergebnis ist eine nichtlineare Wellenzahlerhöhung des Lichtes im Plasma um

$$\Delta k = \tfrac{1}{16}\,k_\tau(\omega_P/\omega_\tau)^2\,[e\,\mathfrak{E}_\tau/(m\,\omega_\tau\,c)]^2. \tag{19}$$

Im folgenden sehen wir von diesem kleinen Effekt ab und behandeln den ersten Term von (18), der die Mischfrequenzen

$$\omega_\alpha = \omega_1+(\omega_1-\omega_2) \quad \text{und} \quad \omega_\beta = \omega_2-(\omega_1-\omega_2) \quad \text{enthält.} \tag{20}$$

Bei der Lösung der Diff.-Gl. (18) ist zu beachten, daß die rechte Seite außerhalb des Volumens V verschwindet, in dem sich die zwei Laserstrahlen durchdringen. Die Lösung für den Transversalteil des Feldes läßt sich am einfachsten durch FOURIER-Transformation und Beachtung der Strahlungsbedingung als Raumintegral über dieses Volumen gewinnen. Sie ergibt sich, wie der wellengleichungsartige Typ von (18) erwarten läßt, als Summe von Kugelwellen, die sich mit den zu ω_α, ω_β gehörenden Phasengeschwindigkeiten ausbreiten [6].

[9] J. DAWSON u. C. OBERMAN, Phys. Fluids **5**, 517 [1962].

[10] L. SPITZER, Physics of Fully Ionized Gases, Intersciences Publishers, New York 1956.

[11] D. MONTGOMERY u. D. TIDMAN, Phys. Fluids **7**, 242 [1964].

In der Wellenzone lautet die Lösung im Aufpunkt $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{r}=\mathfrak{n}\,r$, $|\mathfrak{n}|=1$ (21)

$$\mathfrak{E}^{(3)}(\mathfrak{r},t) = -\frac{1}{r}\,\frac{1}{4\pi c^2}\,\frac{e\,\mathfrak{E}_1}{m\,\omega_1\,c}\cdot\frac{e\,\mathfrak{E}_2}{m\,\omega_2\,c}\,\frac{1}{4}\,\frac{c^2\,\omega_{\rm P}}{4(\Delta\omega)^2+\omega_c{}^2}\int\limits_V \mathrm{d}^3\mathfrak{r}'\left\{[\mathfrak{n}[\mathfrak{n}\,\mathfrak{k}_a]]\,\mathfrak{k}_2\cdot\mathfrak{E}_1\,\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}+[\mathfrak{n}[\mathfrak{n}\,\mathfrak{E}_1]]\,\mathfrak{k}_{12}^2\right\}$$
$$\cdot\left\{2\,\Delta\omega\,\sin[k_\alpha^* r-\omega_a t+\varphi_a+(\mathfrak{k}_a-k_\alpha^*\,\mathfrak{n})\cdot\mathfrak{r}']+\varepsilon_{12}\,\omega_c\cos[k_\alpha^* r-\omega_a t+\varphi_a+(\mathfrak{k}_a-k_\alpha^*\,\mathfrak{n})\cdot\mathfrak{r}']\right\}$$
$$+\text{Permutation }(1\longleftrightarrow 2) \tag{22}$$

mit den Abkürzungen

$$\omega_a=2\,\omega_1-\omega_2\,,\quad \mathfrak{k}_a=2\,\mathfrak{k}_1-\mathfrak{k}_2\,,\quad k_\alpha^{*2}\,c^2=\omega_\alpha^2-\omega_{\rm p}^2\,,\quad \varepsilon_{12}=-\varepsilon_{21}=-1\,. \tag{23}$$

Pro Zeiteinheit wird aus dem Volumen V im Zeitmittel die Energie $\mathrm{d}I$ in das Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$ gestrahlt:

$$\mathrm{d}I=\overline{\{\mathfrak{E}^{(3)}(\mathfrak{r},t)\}^2}\cdot\frac{c}{4\pi}\,r^2\,\mathrm{d}\Omega$$
$$=\left(\frac{e^2\,\mathfrak{E}_1\cdot\mathfrak{E}_2}{m^2\,\omega_1\,\omega_2\,c^2}\right)^2\frac{1}{(16\,\pi)^2}\,\frac{\omega_{\rm p}^2}{4(\Delta\omega)^2+\omega_c{}^2}\,\frac{1}{2}\left\{[\mathfrak{n}[\mathfrak{n}\,\mathfrak{k}_a]]\,\mathfrak{k}_2\cdot\mathfrak{E}_1\,\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}+[\mathfrak{n}[\mathfrak{n}\,\mathfrak{E}_1]]\,\mathfrak{k}_{12}^2\right\}^2$$
$$\left\{\left[\int\limits_V \mathrm{d}^3\mathfrak{r}'\cos(\mathfrak{k}_a-k_\alpha^*\,\mathfrak{n})\cdot\mathfrak{r}'\right]^2+\left[\int\limits_V \mathrm{d}^3\mathfrak{r}'\sin(\mathfrak{k}_a-k_\alpha^*\,\mathfrak{n})\cdot\mathfrak{r}'\right]^2\right\}\frac{c}{4\pi}\,\mathrm{d}\Omega+\text{Perm. }(1\longleftrightarrow 2). \tag{24}$$

Wenn V ein Symmetriezentrum besitzt, kann das Koordinatensystem so gelegt werden, daß das Integral über den Sinus wegfällt, und die Intensität ist wesentlich durch die Größe η bestimmt:

$$\eta=\int\limits_V \mathrm{d}^3\mathfrak{r}\cos[(\mathfrak{k}_a-k_\alpha^*\,\mathfrak{n})\cdot\mathfrak{r}]=\int\mathrm{d}z\cos[(k_a-k_\alpha^*\cos\vartheta)\;z]\cdot\int\mathrm{d}x\cos(k_\alpha^*\sin\vartheta\;n_x\,x)\cdot\int\mathrm{d}y\cos(k_\alpha^*\sin\vartheta\;n_y\,y)\,. \tag{25}$$

Dabei ist die z-Achse in Richtung des Vektors $\mathfrak{k}_a$ gelegt. Der Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ schließt mit $\mathfrak{k}_a$ den Winkel ϑ ein:

$$\mathfrak{n}=(n_x\sin\vartheta,\,n_y\sin\vartheta,\cos\vartheta),\qquad n_x{}^2+n_y{}^2=1\,. \tag{26}$$

η hängt von der Form des Streuvolumens ab, das durch den Querschnitt der Laserstrahlen und den Winkel zwischen ihnen bekannt ist, und kann im Prinzip exakt berechnet werden. Wir approximieren es durch einen Würfel mit den Kantenlängen a, a, L in x, y, z-Richtung. Das heißt, wir nehmen in der FOURIER-Transformation (25) der Begrenzungslinien von V nur den Parameter einer effektiven Ausdehnung mit, um zu untersuchen, welche Effekte die Größe des Streuvolumens im Streulicht hervorruft.

$$\eta=a^2\,L\cdot\underbrace{\frac{\sin[(k_a-k_\alpha^*\cos\vartheta)\;L]}{(k_a-k_\alpha^*\cos\vartheta)\;L}}_{\eta_1}\cdot\underbrace{\frac{\sin(k_\alpha^*\sin\vartheta\;n_x\,a)}{k_\alpha^*\sin\vartheta\;n_x\,a}\cdot\frac{\sin(k_\alpha^*\sin\vartheta\;n_y\,a)}{k_\alpha^*\sin\vartheta\;n_y\,a}}_{\eta_2}$$
$$=a^2\,L\qquad\eta_1\qquad\eta_2\,. \tag{27}$$

Andererseits ist für ein zylinderförmiges Volumen vom Radius a

$$\eta=\pi\,a^2\,L\cdot\frac{\sin[(k_a-k_\alpha^*\cos\vartheta)\;L]}{(k_a-k_\alpha^*\cos\vartheta)\;L}\cdot\frac{2}{k_\alpha^*\sin\vartheta\;a}\,J_1(k_\alpha^*\sin\vartheta\;a)\,. \tag{28}$$

Der Vergleich von (27) und (28) zeigt für $k_\alpha^*\sin\vartheta\;a\gg 1$, daß die „effektive" Ausdehnung doch ein etwas mangelhafter Parameter ist, denn jenachdem ob n_x, n_y gleich oder ungleich Null ist, nimmt (27) um $(k_\alpha^*\sin\vartheta\;a)^{1/2}$ langsamer oder schneller ab. Das heißt, Ecken des Streuvolumens haben eine gewisse Winkelcharakteristik zur Folge. Weiter unten wird allerdings der Fall $k_\alpha^*\sin\vartheta\;a\ll 1$ näher untersucht, in dem (27) und (28) übereinstimmen.

Die aus (23) und (7, 8, 9) folgende Darstellung von

$$\Delta k\cdot L=(k_a-k_\alpha^*\cos\vartheta)\;L=2\,k_1\,L\left(2\sin^2\frac{\alpha_{12}}{2}+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)+k_1\,L\,O\left(\frac{\omega_{\rm P}}{\omega_1}\right)^2 \tag{29}$$

erleichtert es, den Raumwinkelbereich $\Delta\Omega(\vartheta,\varphi)$ zu diskutieren, in dem das Streulicht bevorzugt austritt.

Für praktische Fälle ist stets

$$k_1 L \gg 1 , \qquad k_1 a \gg 1 . \tag{30}$$

Daher hat η_2 den größten Wert – „Resonanzverhalten" – für

$$\sin \vartheta \approx \vartheta \leqq 1/k_\alpha^* a \approx 1/k_1 a , \tag{31}$$

woraus ein Resonanzwinkelbereich von

$$\Delta\Omega = \Delta \cos \vartheta \, \Delta\varphi \approx \tfrac{1}{2} (1/k_1 a)^2 \Delta\varphi \tag{32}$$

folgt. Für Rubinlaserlicht: $k_1 = 9 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}$ und $L \approx a \approx 1$ mm ist die Resonanzwinkelbreite (31)

$$\vartheta < 1{,}1 \cdot 10^{-4} \mathrel{\hat=} 6{,}3 \cdot 10^{-3}\,{}^\circ , \tag{33}$$

das heißt, das Streulicht wird in extrem dünnen Kegeln um die Richtungen von $\mathfrak{k}_\alpha$ und $\mathfrak{k}_\beta = 2\,\mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_1$ ausgesandt. $\mathfrak{k}_\alpha$ und $\mathfrak{k}_\beta$ liegen in der von $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ aufgespannten Ebene, für nicht zu großes α_{12} ungefähr um diesen Winkel von $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ getrennt. η_1 hat nach (29) Resonanz nur für

$$2 \sin(\alpha_{12}/2) \approx \alpha_{12} < \sqrt{1/k_1 L} \tag{34}$$

und dann im Winkelbereich

$$\sin \vartheta \approx \vartheta < \sqrt{1/k_1 L} . \tag{35}$$

Bedingung (34) an α_{12} lautet mit denselben Zahlen

$$\alpha_{12} < 1{,}1 \cdot 10^{-2} \mathrel{\hat=} 0{,}6\,{}^\circ , \tag{36}$$

doch wird die dann einsetzende Resonanz von η_1 durch die Abnahme des Faktors $\mathfrak{k}_{12}^4$ von (24) gerade wieder aufgehoben, bzw. noch verschlechtert [siehe (15)].

Der von $[\mathfrak{n}[\mathfrak{n}\,\mathfrak{k}_\alpha]]\,\mathfrak{k}_2 \cdot \mathfrak{E}_1\, \omega_\text{P}\, \omega_1^{-1}$ stammende Beitrag zum Streulicht [Gl. (24)] ist im Resonanzwinkelbereich gegen den von $[\mathfrak{n}[\mathfrak{n}\,\mathfrak{E}_1]]\, k_{12}^2$ zu vernachlässigen.

Insgesamt wird unter der Bedingung

$$\sqrt{\frac{1}{k_1 L}} \leqq 2 \sin \frac{\alpha_{12}}{2} < \frac{1}{k_1 \lambda_\text{D}} \tag{37}$$

pro Zeiteinheit die Energie ΔI in den Resonanzwinkelbereich $\Delta\Omega$ um die Richtung $\mathfrak{k}_\alpha$ gestrahlt:

$$\Delta I = \mathfrak{E}_1{}^2 \frac{c}{8\pi} a^2 \left(\frac{e^2\, \mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E}_2}{m^2\, \omega_1\, \omega_2\, c^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{(32\pi)^2} \frac{\omega_\text{p}^2}{4(\Delta\omega)^2 + \omega_\text{c}{}^2} \sin^2(\mathfrak{k}_\alpha, \mathfrak{E}_1)\, \Delta\varphi , \tag{38}$$

wobei $\sin^2[4\, k_1 L \sin^2(\alpha_{12}/2)]$ durch seinen Mittelwert $\frac{1}{2}$ ersetzt wurde.

Die in Richtung $\mathfrak{k}_\beta$ gestrahlte Energie erhält man aus (38) durch Vertauschen der Indizes 1 und 2.

$\mathfrak{E}_1{}^2 (c/8\pi) a^2$ ist die Leistung I_1 des Lasers 1. Hat man die Frequenzen auf $\Delta\omega = 0$ abgestimmt, ergibt sich mit (11) die Parameterabhängigkeit

$$\Delta I \sim I_1 \cdot \mathfrak{E}_1{}^4 \cdot \frac{1}{\omega_1{}^4}\, T^3\, \frac{1}{n}\, \frac{1}{(\ln \Lambda)^2} . \tag{39}$$

Mit den Zahlenwerten von [1]:

$$\begin{gathered} n = 10^{14}\text{ cm}^{-3}, \qquad T = 10^5\,{}^\circ\text{K} , \\ |\mathfrak{E}_1| = |\mathfrak{E}_2| = 10^8\text{ V/cm} , \quad k_1 = 9 \cdot 10^4\text{ cm}^{-1}, \\ \mathfrak{E}_1 \parallel \mathfrak{E}_2 , \qquad \Delta\omega = 0 \end{gathered} \tag{40}$$

ist $\left(\dfrac{e\, \mathfrak{E}_1}{m\, \omega_1\, c} \right)^2 = 4{,}8 \cdot 10^{-6}$, $\left(\dfrac{\omega_\text{P}}{\omega_\text{c}} \right)^2 = 0{,}97 \cdot 10^8$,

$$\lambda_\text{D} = 2{,}2 \cdot 10^{-4}\text{ cm}$$

und daher

$$\Delta I = I_1 \cdot 1{,}9 \cdot 10^{-7} \sin^2(\mathfrak{k}_\alpha, \mathfrak{E}_1)\, \Delta\varphi , \quad \alpha_{12} < 3{,}1^\circ .$$

Für „konventionellere" Feldstärken $|\mathfrak{E}_1| = 10^7$ V/cm und $n = 10^{17}\text{ cm}^{-3}$, $T = 5 \cdot 10^4\,{}^\circ$K ist

$$\begin{gathered} \left(\frac{e\, \mathfrak{E}_1}{m\, \omega_1\, c} \right)^2 = 4{,}8 \cdot 10^{-8}, \quad \left(\frac{\omega_\text{P}}{\omega_\text{c}} \right)^2 = 6{,}4 \cdot 10^4, \\ \lambda_\text{D} = 4{,}9 \cdot 10^{-5}\text{ cm} \end{gathered} \tag{41}$$

und daher

$$\Delta I = I_1 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-14} \sin^2(\mathfrak{k}_\alpha, \mathfrak{E}_1)\, \Delta\varphi , \quad \alpha_{12} < 13^\circ .$$

III. Drei Laserstrahlen

Gegenüber dem oben behandelten Fall hat man in Form von Frequenz und Richtung des dritten Strahles neue frei wählbare Parameter. Im folgenden soll diskutiert werden, wie weit sie zum leichteren Nachweis der nichtlinearen Effekte ausnützbar sind.

Je zwei Wellen i, k mit $i, k = 1, 2, 3$ polarisieren das Medium in nichtlinearer Weise. Das durch Streuung von Welle l mit $l = 1, 2, 3$ erhaltene Signal heiße $I^{(ik)\,l}$. In Abschnitt II wurde $\{I^{(12)\,1} + I^{(21)\,1}\}$ und $\{I^{(12)\,2} + I^{(21)\,2}\}$ berechnet und auf die Bedeutung von $I^{(ii)\,i}$ hingewiesen. Die weiteren $I^{(ik)\,i}$, $I^{(ik)\,k}$ erhält man durch beziehungsweises Umbenennen der Indizes. Wenn die entsprechenden Bedingungen (8), (16) nicht mehr erfüllt sind, werden die Beiträge vernachlässigbar klein.

Es bleiben die $I^{(ik)\,l}$ mit $i \neq k \neq l$ zu berechnen, von denen im folgenden $I^{(12)\,3}$ herausgegriffen sei.

Die Beziehungen (6) und (17) können mit den Indizes 1, 2 für Größen zweiter und 3 für Größen erster Ordnung direkt in Diff.-Gl. (4) eingesetzt werden, welche nach einfachen Umformungen analog zu Gl. (18) lautet

$$\left(c^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{\mathrm{p}}^2\right) \mathfrak{E}^{(3)}(\mathfrak{r}, t) = -\omega_{\mathrm{P}} \frac{e\,\mathfrak{E}_1}{m\,\omega_1\,c} \cdot \frac{e\,\mathfrak{E}_2}{m\,\omega_2\,c} \frac{1}{4} \cdot \frac{c^2}{4(\Delta\omega)^2 + \omega_c^2}$$
$$\cdot \left\{ \left[(\mathfrak{k}_3 + \mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2)\, \mathfrak{k}_{12} \cdot \mathfrak{E}_3 \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_3} + \mathfrak{E}_3\, \mathfrak{k}_{12}^2 \right] [2\,\Delta\omega \sin(\Phi_3 + \Phi_1 - \Phi_2) - \omega_c \cos(\Phi_3 + \Phi_1 - \Phi_2)] \right. \tag{42}$$
$$\left. + \left[(\mathfrak{k}_3 - \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2)\, \mathfrak{k}_{12} \cdot \mathfrak{E}_3 \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_3} + \mathfrak{E}_3\, \mathfrak{k}_{12}^2 \right] [2\,\Delta\omega \sin(\Phi_3 - \Phi_1 + \Phi_2) + \omega_c \cos(\Phi_3 - \Phi_1 + \Phi_2)] \right\}.$$

Die pro Zeiteinheit mit den Frequenzen $\omega_3 \pm (\omega_1 - \omega_2)$ in den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ gestrahlte Energie berechnet sich daraus zu

$$\mathrm{d}I = \frac{c}{4\pi}\, \mathrm{d}\Omega \left(\frac{e^2\, \mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E}_2}{m^2\, \omega_1\, \omega_2\, c^2}\right)^2 \frac{1}{(16\,\pi)^2}\, \frac{1}{2}\, \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{4(\Delta\omega)^2 + \omega_c^2} \left\{ [\mathfrak{n}[\mathfrak{n}\,\mathfrak{k}_\gamma]]\, \mathfrak{k}_{12} \cdot \mathfrak{E}_3 \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_3} + [\mathfrak{n}[\mathfrak{n}\,\mathfrak{E}_3]]\, \mathfrak{k}_{12}^2 \right\}^2 \tag{43}$$
$$\cdot \left\{ \left[\int_V \mathrm{d}^3\mathfrak{r}' \cos(\mathfrak{k}_\gamma - k_\gamma^*\, \mathfrak{n}) \cdot \mathfrak{r}' \right]^2 + \left[\int_V \mathrm{d}^3\mathfrak{r}' \sin(\mathfrak{k}_\gamma - k_\gamma^*\, \mathfrak{n})\, \mathfrak{r}' \right]^2 \right\} + \text{Perm.}\ (1 \longleftrightarrow 2)$$

mit
$$\mathfrak{k}_\gamma = \mathfrak{k}_3 + \mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2\,, \qquad c^2\, k_\gamma^{*2} = (\omega_3 + \omega_1 - \omega_2)^2 - \omega_{\mathrm{p}}^2 \approx c^2\, k_1{}^2. \tag{44}$$

Das Streuvolumen werde durch einen Würfel mit den Seiten a, b, L, $a \approx b$ approximiert, dessen Seite L in Richtung des Vektors $\mathfrak{k}_\gamma$ gelegt ist. Dann wird für $I^{(12)3}\,\eta'$ gebraucht mit

$$\eta' = \int_V \mathrm{d}^3\mathfrak{r}' [(\mathfrak{k}_\gamma - k_\gamma^*\, \mathfrak{n}) \cdot \mathfrak{r}'] = a\,b\,L\, \underbrace{\frac{\sin[(k_\gamma - k_\gamma^* \cos\vartheta)\, L]}{(k_\gamma - k_\gamma^* \cos\vartheta)\, L}}_{\eta_1{}'} \cdot \underbrace{\frac{\sin[k_\gamma^* \sin\vartheta\; a\, n_x]}{k_\gamma^* \sin\vartheta\; a\, n_x} \cdot \frac{\sin[k_\gamma^* \sin\vartheta\; b\, n_y]}{k_\gamma^* \sin\vartheta\; b\, n_y}}_{\eta_2{}'}. \tag{45}$$

ϑ soll der Winkel zwischen Beobachtungsrichtung $\mathfrak{n}$ und Vektor $\mathfrak{k}_\gamma$ von (44) sein.

$\eta_2{}'$ unterscheidet sich nicht wesentlich von η_2. Wieder gibt es den Resonanzbereich (31)

$$0 \leqq \sin\vartheta \leqq 1/k_1\, a \ll 1\,. \tag{46}$$

Wenn in diesem Bereich ($\cos\vartheta \approx 1$) auch $\eta_1{}'$ den Resonanzwert 1 annehmen soll, muß das Argument des sinus verschwinden, d. h. $k_\gamma \approx k_1$ sein.

Anschaulich heißt dies: Aus drei Vektoren $\mathfrak{k}_1$, $-\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{k}_3$ (annähernd) gleicher Länge soll durch Addition ein Vektor eben dieser Länge entstehen. Es gibt im wesentlichen zwei verschiedene Konfigurationen, die dies tun.

a) Die drei Vektoren werden nicht komplanar zueinander angeordnet, d. h. sie liegen etwa wie die Achsen eines Koordinatensystems. Diese Anordnung hat den experimentellen Vorteil, daß die Streurichtung $\mathfrak{k}_\gamma$ von allen drei Laserrichtungen relativ weit entfernt ist. Nachteilig ist, daß der dritte Strahl mit hoher Präzision ausgerichtet sein muß.

Aus (44) und (7) folgt

$$(k_\gamma - k_\gamma^* \cos\vartheta)\, L = -\left(\frac{2\,L}{k_3} k_1\, k_3 \sin^2\frac{\alpha_{13}}{2} - k_1\, k_2 \sin^2\frac{\alpha_{12}}{2} - k_2\, k_3 \sin^2\frac{\alpha_{23}}{2}\right) + 2\, k_\gamma^*\, L \sin^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{\omega_{\mathrm{P}}\, L}{c}\, O\left(\frac{\omega_{\mathrm{P}}}{\omega_1}\right)^2, \tag{47}$$

dabei ist α_{ik} der Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{k}_i$, $\mathfrak{k}_k$. Die Resonanzbedingung für $\eta_1{}'$

$$|(k_\gamma - k_\gamma^* \cos\vartheta)\, L| \leqq 1 \tag{48}$$

bestimmt im Bereich (46) den dritten Winkel $\alpha_{i_0 k_0}$, wenn zwei von den α_{ik} vorgegeben sind, mit einer Genauigkeit

$$\Delta\alpha_{i_0 k_0} \leqslant \frac{1}{k_1\, L \sin\alpha_{i_0\, k_0}}\,. \tag{49}$$

Das heißt bei

$$\alpha_{i_0 k_0} = 20^\circ \text{ und } L = 1\ \text{mm ist } \Delta\alpha_{i_0 k_0} \leqq 1{,}8 \cdot 10^{-2\,\circ}. \tag{50}$$

Unter diesen Bedingungen wird in den Resonanzwinkelbereich (32) um $\mathfrak{k}_\gamma$ pro Zeiteinheit die Energie ΔI gestreut:

$$\Delta I = \mathfrak{E}_3{}^2 \frac{c}{8\,\pi}\, a^2 \left(\frac{e^2\, \mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E}_2}{m^2\, \omega_1\, \omega_2\, c^2}\right)^2 \frac{1}{(16\,\pi)^2}\, \frac{1}{2}\, \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{4(\Delta\omega)^2 + \omega_c^2}$$
$$\cdot \sin^2(\mathfrak{k}_\gamma, \mathfrak{E}_3)\; [2 \sin(\alpha_{12}/2)]^4\, (k_1\, L)^2\, \Delta\varphi\,. \tag{51}$$

Dadurch wird in der Intensität ein Faktor

$$f = 2[2 \sin(\alpha_{12}/2)]^4\, (k_1\, L)^2 \tag{52}$$

gegenüber der Verwendung von nur zwei Lichtstrahlen [Gl. (38)] gewonnen. Für das Zahlenbeispiel (40) von Abschnitt II $L=1$ mm, $\alpha_{12}=3^0$ macht dies einen Faktor

$$f=1{,}2\cdot 10^3 \qquad (53)$$

und für Beispiel (41) und $\alpha_{12}=10^0$

$$f=1{,}5\cdot 10^5 . \qquad (54)$$

Bei Verzicht auf die genaue Ausrichtung geht gerade der Faktor f verloren, so daß gegenüber II intensitätsmäßig nichts gewonnen wäre.

b) Zwei von den Vektoren $\mathfrak{k}_1$, $-\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{k}_3$ werden (annähernd) antiparallel zueinander angeordnet. Die Vektorsumme hat dann stets die Länge k_1, unabhängig von der Richtung des dritten Vektors. Dieser Vorteil wird aber dadurch wieder zunichte gemacht, daß das Streulicht maximal nur um

$$\vartheta' = \sqrt{1/k_1 L} \qquad (55)$$

von der Richtung des dritten Strahles abweicht, wie aus (47) abzuleiten ist. Unter diesem kleinen Winkel sind Streulicht und Primärlicht experimentell praktisch nicht mehr trennbar, so daß diese Konfiguration nicht weiter diskutiert wird.

IV. Zusammenfassung

Der betrachtete Streuprozeß an erzwungenen Fluktuationen ist von dritter Ordnung, so daß das Intensitätsverhältnis von Streulicht zu Primärlicht mit der vierten Potenz der elektrischen Feldstärke ansteigt. Die Zahlen aus Abschnitt II zeigen, daß mit den gegenwärtig erreichbaren Werten (10^8 V/cm) das Intensitätsverhältnis weit über den linearen Wert von typisch [12] 10^{-11} ansteigen kann, daß aber der Verlust von einer Zehnerpotenz in der Feldstärke und andere Plasmaparameter die Intensität u. U. an die Grenze des Meßbaren rücken. Die Intensität kann wesentlich gesteigert werden, wenn drei Laserstrahlen sorgfältig genug gegeneinander justiert werden. Es ist anzunehmen, daß die natürliche Winkeldivergenz von fokussierten Laserstrahlen die Erfüllung der Resonanzwinkelbedingung erleichtert.

Die in II und III abgeleiteten Resonanzbedingungen haben eine anschauliche physikalische Bedeutung. Es werden gerade die Winkel angegeben, für die bei Beugung an einem dreidimensionalen Volumen mit den Kantenlängen a, b, L nach dem HUYGENSschen Prinzip die Phasendifferenz von zwei beliebigen Strahlen noch klein gegen eins ist.

Herrn Professor A. SCHLÜTER verdanke ich die Anregung zu dieser Arbeit, zu der Herr Dr. W. H. KEGEL durch anregende Diskussionen beitrug.

Die Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und Euratom über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

[12] H.-J. KUNZE, E. FÜNFER, B. KRONAST u. W. H. KEGEL, Phys. Letters **11**, 42 [1964].